Altersgruppe Klasse 8

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist.*
Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatikalisch einwandfreien Sätzen dar.

Aufgabe 1

Anne hat aufeinanderfolgende natürliche Zahlen addiert und als Summe 119 erhalten. Von diesen aufeinanderfolgenden Zahlen ist die Differenz aus der größten und der kleinsten eine Primzahl.

Ermittle, welche Zahlen Anne addiert hat, und zeige, dass diese durch die Angaben eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 2

Leo hat an einem Kiosk einen Müsliriegel gekauft. Er hatte nur Euro-Münzen dabei, und zwar genau drei. Mit genau einer dieser Münzen bezahlte er. Das korrekt zurückgegebene Wechselgeld war genau so viel, wie ihm noch zum Bezahlen mit den beiden anderen Münzen gefehlt hatte.

a) Leo meint, dass das Wechselgeld 35 Cent betrug.
Ermittle, welche Münzen Leo in diesem Fall bei sich hatte und wie viel der Müsliriegel gekostet hat. Begründe auch, warum sich dies aus den Angaben eindeutig ermitteln lässt.

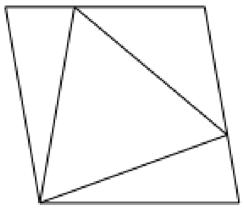
b) Leo meint nun, dass das Wechselgeld doch 55 Cent betrug.
Untersuche, ob dies möglich ist.

c) Leo ist sich nun überhaupt nicht mehr sicher.
Untersuche, ob es auch einen Wechselgeldbetrag gibt, bei dem nicht eindeutig ermittelt werden kann, welche Münzen Leo bei sich hatte.

Hinweis: Die Euro-Münzen gibt es nur als 1-Cent-, 2-Cent-, 5-Cent-, 10-Cent-, 20-Cent-, 50-Cent-,1-Euro- und 2-Euro-Münzen.

Aufgabe 3

Eine Raute und ein gleichseitiges Dreieck haben dieselbe Seitenlänge, ein Eckpunkt des Dreiecks fällt mit einem Eckpunkt der Raute zusammen und die beiden anderen Eckpunkte des Dreiecks liegen auf verschiedenen Seiten der Raute, siehe nebenstehende Abbildung.



Ermittle die Größen der Innenwinkel der Raute, ohne zu messen.

Hinweis: Ein anderer Name für eine Raute ist Rhombus.

Altersgruppe Klasse 9

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist.*
Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatikalisch einwandfreien Sätzen dar.

Aufgabe 1

siehe Klasse 8 Aufgabe 2

Aufgabe 2

siehe Klasse 8 Aufgabe 3

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle positiven ganzen Zahlen n, für die n, $n+4$ und $n+8$ Primzahlen sind.

Altersgruppe Klasse 10 und Einführungsphase

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist.*
Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatikalisch einwandfreien Sätzen dar.

Aufgabe 1

Es sei m eine von null verschiedene und ansonsten beliebige rationale Zahl.

In einem kartesischen Koordinatensystem (eine Koordinateneinheit soll gleich 1 cm sein) beschreibt dann die Gleichung $y = m \cdot (x-5) + 2$ die Menge aller Punkte, die auf einer bestimmten Geraden g in der x-y-Ebene liegen. Die Gerade g schneidet die x-Achse in einem Punkt A und die y-Achse in einem Punkt B.

Gegeben ist weiterhin ein Punkt P mit den Koordinaten $P(5|2)$.

a) Weisen Sie nach, dass alle auf diese Art beschriebenen Geraden (unabhängig vom konkret gewählten Wert für m) den Punkt P enthalten.

b) Es gelte $m = -0{,}8$. Die Punkte A und B bilden zusammen mit dem Koordinatenursprung O ein Dreieck.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Dreiecks OAB.

c) Nun gelte $m = -0{,}3$. Eine Gerade durch O und P zerlegt das entstehende Dreieck OAB in die Teildreiecke OPB und OAP.
Berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte $A_{OPB}: A_{OAP}$ in Form eines Verhältnisses teilerfremder ganzer Zahlen.

d) Für welche Werte von m existiert das Verhältnis der Flächeninhalte $A_{OPB}: A_{OAP}$ und ist für diese Werte ebenfalls eine rationale Zahl?
(Hier werden also wieder alle vorgegebenen Werte für m betrachtet.)

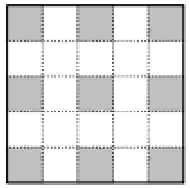
Hinweis: Liegen drei durch gewisse Eigenschaften festgelegte Punkte auf einer Geraden oder fallen zwei von ihnen zusammen (sodass es eigentlich nur zwei Punkte gibt oder gar nur einen), dann sagt man mitunter, dass die drei Punkte ein „entartetes" Dreieck bilden. Solche entarteten Dreiecke werden hier nicht betrachtet.

Aufgabe 2

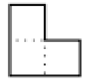
Bestimmen Sie alle positiven ganzen Zahlen n, für die n, $n+4$ und $n+8$ Primzahlen sind.

Aufgabe 3

In Abbildung A 591014 a ist ein Quadrat aus 25 Feldern gegeben. Diese Figur soll mit (zueinander kongruenten) L-Steinen ausgelegt werden, wobei ein spezielles Feld vorher entfernt wird. Ein L-Stein besteht aus drei in L-Form angeordneten quadratischen Feldern (siehe Abbildung A 591014 b).



A 591014 a



A 591014 b

a) Aus dem Quadrat wird eines der grauen Felder entfernt. Zeigen Sie, dass sich die aus den verbleibenden 24 Feldern bestehende Figur mit 8 L-Steinen legen lässt.

b) Aus dem Quadrat wird eines der weißen Felder entfernt. Zeigen Sie, dass sich die aus den verbleibenden 24 Feldern bestehende Figur nicht mit 8 L-Steinen legen lässt.

Altersgruppe Qualifikationsphase

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist.*
Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatikalisch einwandfreien Sätzen dar.

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f, die für reelle Zahlen x mit $|x| \leq 3$ durch die Gleichung $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ definiert ist.

a) Eine zweite Funktion g wird durch $g(x) = 2 - \sqrt{9-x^2}$ definiert.
Man untersuche, ob die Graphen von f und g gemeinsame Punkte besitzen, und berechne gegebenenfalls deren Koordinaten.

b) Es sei a eine reelle Zahl. Die Funktion g_a wird für $-3 \leq x \leq 3$ durch die Gleichung
$g_a(x) = a - \sqrt{9-x^2}$ definiert.
Man untersuche in Abhängigkeit von a, ob der Graph von f und der Graph von g_a gemeinsame Punkte besitzen, und berechne gegebenenfalls deren Koordinaten.

Aufgabe 2

Ein Quadrat $ABCD$ wird durch eine Gerade g in zwei Teile mit gleichem Flächeninhalt zerlegt.

Man beweise, dass dann der Diagonalenschnittpunkt M des Quadrats $ABCD$ auf der Geraden g liegt.

Aufgabe 3

Man beweise, dass es keine ganzen Zahlen x und y gibt, die die Gleichung

$$20x^2 - 19y^2 = 2019$$

erfüllen.